# Veeltermen en rationale lettervormen

UHASSELT
KNOWLEDGE IN ACTION

Machteld Verhenne

# Inhoudstafel

# 1 Veeltermen: definitie en bewerkingen

## 1.1 Definitie en kenmerken van een veelterm

De algebraïsche vorm $7x^3+\sqrt{5}x-11$ bestaat uit de reële getallen $7$, $\sqrt{5}$ en $11$ en uit machten met natuurlijke exponenten van de onbekende $x$. Een dergelijke vorm noemen we een veelterm. $11$ is de constante term en $7x^3$ is de hoogstegraadsterm. Omdat $3$ hier de grootste exponent is zeggen we dat de **graad** van $7x^3+\sqrt{5}x-11$ drie is.
Een reëel getal kunnen we ook beschouwen als een veelterm van de nulde graad. $6=6x^0$
De **nulveelterm heeft geen graad** omdat er geen term is waarvan de coëfficiënt niet nul is.

Aan een veelterm geven we ook soms een naam: $v(x)$ bijvoorbeeld.

De **verzameling van alle veeltermen** noteren we met $\mathbb{R}[x]$.
$\mathbb{R}\subset\mathbb{R}[x]$ want elk getal kan je schrijven als een veelterm met graad nul.

Een **veelterm van de n-de graad** kunnen we algemeen schrijven als
$v(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots a_1x+a_0$ met $n\in\ \mathbb{N}$ en $a_n,a_{n-1},\ldots a_1,a_0\in\mathbb{R}$ .[1]

**Veeltermfunctie**
Net zoals bij een tweeterm van de eerste graad $ax+b$ een eerstegraadsfunctie $f(x)=ax+b$ hoort, hoort bij een willekeurige veelterm $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots a_1x+a_0$, ook een veeltermfunctie:
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots a_1x+a_0$.

Twee veeltermen $v(x)$ en $w(x)$ zijn gelijk als de coëfficiënten van gelijksoortige termen gelijk zijn.
$-5x^2+ax+b=cx^2+6\ \Leftrightarrow\ a=0\ en\ b=6\ en\ c=-5$
Als we in een veelterm $v(x)$ de variabele $x$ vervangen door een getal $a$ dan berekenen we de **getalwaarde** van deze veelterm voor $x=a$.

Voorbeeld: De getalwaarde van $v(x)=5x^6-3x^4+8x^2-7x+5$ voor $x=-1$ is
$v(-1)=5\ (-1)^6-3(-1)^4+8(-1)^2-7(-1)+5=22$

1. Gegeven de veeltermfunctie $f(x)=2x^3+3x-4$. Bereken
   (a) $f(1)$
   (b) $f(2)$
   (c) $f(-3)$

[1] $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots a_1x+a_0$ kunnen we ook noteren met het symbool $\sum$ sigma (de Griekse letter s): $\sum\limits_{i=0}^{n} a_ix^i$
We lezen dit als: de som voor $i$ gaande van $0$ tot $n$ van $a-i$ maal $x$ tot de macht $i$.

2. Bereken de waarden van $a, b, c, d$ en $e$ in de volgende gelijkheden:

   (a) $(ax+b)\cdot\left(\frac{1}{2}x-1\right)=(x-3c)\cdot\left(4x+\frac{2}{3}\right)$

   (b) $(2x+1)\cdot(ax+b)\,x=\left(x^2+cx+d\right)\cdot(x+2)$

   (c) $(a+3)\,x^3+(b+2)\,x^2+cx+4a=cx^3+ax^2+2x-d$

   (d) $\left(ax^2+bx+c\right)\cdot\left(x^2+3\right)=\left(3x^2+x\right)\cdot(dx+e)\cdot x$

## 1.2 Bewerkingen met veeltermen

**Samengestelde functies**

Een functie $f(x)=3x+1$ heeft als grafiek $y=3x+1$. We kunnen op de y-waarde opnieuw een functie laten inwerken, bijv. $g(y) = 2y^2+4y+5$.

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(x)) \\ &= 2(3x+1)^2+4(3x+1)+5 \\ &= 2(9x^2+6x+1)+12x+4+5 \\ &= 18x^2+24x+11 \end{aligned}$$

We noteren dit met $g(f(x))$ of ook $(g\circ f)(x)$. We lezen dit laatste als “g na f”.

Voor het optellen en vermenigvuldigen van veeltermen werken we met de eigenschappen van bewerkingen. Ook voor veeltermen gelden de **associativiteit, commutativiteit** en **distributiviteit**.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \left(x^3-4x^2+6x-7\right)-\left(4x^3+x-5x^2+1\right) &= x^3-4x^2+6x-7-4x^3+5x^2-x-1 \\ &= -3x^3+x^2+5x-8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(x^2+2x-1\right)\cdot\left(-x^2+4x+3\right) &= -x^4+4x^3+3x^2-2x^3+8x^2+6x+x^2-4x-3 \\ &= -x^4+2x^3+12x^2+2x-3 \end{aligned}$$

We schrijven de veelterm in dalende volgorde van de exponenten.

3. Gegeven zijn de veeltermfuncties

   $f(x) = 5x - 4$
   $g(x) = -2x^2 - 1$
   $h(x) = x^2 - 4x + 3$

   Bereken het voorschrift van de volgende functies en bepaal de graad.

   (a) $g \circ f$

   (b) $f \circ g$

   (c) $h \circ g$

   (d) $f \circ h$

   (e) $h \circ g \circ f$

4. Gegeven $v(x) = a(x) + b(x)$ met graad($a(x)$) = graad($b(x)$) $= 3$.
   Geef een voorbeeld van een veelterm $a(x)$ en $b(x)$ zodat

   (a) graad($v(x)$) $= 3$

   (b) graad($v(x)$) $= 2$

   (c) graad($v(x)$) $= 0$

5. Bereken

   (a) $(x - 2) \cdot (x^2 + 3x + 4) \cdot (x + 2)$

   (b) $(x + 3) \cdot (x - 5) - 2(x + x^2 + 7)$

   (c) $(x + 5) \cdot (x^2 - 5x + 125)$

   (d) $(3x-1) \cdot (2x^2 + 5x + 7) \cdot (-3x + 1)$

   (e) $(ab + c) \cdot (bc + d) \cdot (cd + a)$

6. Veeltermen worden vaak gebruikt in ICT toepassingen om een benadering[2] te vinden van bijvoorbeeld een sinuswaarde. Zo is de volgende benadering voor kleine hoeken $x$ vrij nauwkeurig:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

als de hoek $x$ in radialen[3] staat.

(a) Bereken sin $3°\simeq$ sin $0.052$ rad via bovenstaande veelterm en via je rekenmachine. Zorg dat je met een hoek in radialen werkt.

(b) De veeltermbenadering voor cosinus voor kleine hoeken is

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}$$

Bereken cos 3°$\simeq$ cos $0.052$ rad via bovenstaande veelterm en via je rekenmachine. Zorg dat je met een hoek in radialen werkt.

[2]Het benaderen van een functie d.m.v. een veeltermfunctie is ontdekt door de Schot James Gregory en in 1715 geïntroduceerd door de Engelsman Brook Taylor.

[3]Radialen is een alternatieve hoekeenheid voor graden. 1 cirkel komt overeen met 360° en met $2\pi$ radialen. Dus $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radialen.

# 2 De euclidische deling

## 2.1 Oplossen van vergelijkingen door ontbinding

7. Ontbind de volgende veeltermen in factoren:

   (a) $x^2 - 5x + 6$

   (b) $36 - 60x + 25x^2$

   (c) $4x^2 - 25$

   (d) $x^3 + 14x^2 + 45x$

8. Los de volgende vergelijkingen op:

   (a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

   (b) $36 - 60x + 25x^2 = 0$

   (c) $4x^2 = 25$

   (d) $x^3 + 14x^2 + 45x = 0$

Een **vergelijking van de eerste graad** kunnen we oplossen door de onbekende te isoleren. Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} 5x - 10 &= 0 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Een **vergelijking van de tweede graad** kunnen we soms oplossen door de onbekende te isoleren.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x = 2 \text{ of } x &= -2 \end{aligned}$$

In een vergelijking zoals $2x^2 - 10x + 12 = 0$ kunnen we $x$ niet isoleren. We kunnen een vergelijking van de tweede graad wel altijd oplossen door de **discriminant** te gebruiken.

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$
$$\Downarrow D = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 4$$
$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 + 2}{4} = 3 \text{ of } x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{10 - 2}{4} = 2$$

De veelterm kunnen we dan ontbinden in factoren van de eerste graad:

$$2x^2 - 10x + 12 = 2(x - 2) \cdot (x - 3)$$

Als de opgave als een ontbinding staat, kunnen we de nulwaarden aflezen:

$$5 \cdot (x-4) \cdot (2x+1) = 0$$

$\Downarrow$ product van factoren is nul als één van de factoren nul is

$x - 4 = 0$ of $2x + 1 = 0$

$x = 4$ of $x = \frac{1}{2}$

$$x \cdot (x-3) \cdot (-5x+4) \cdot (x+1) = 0$$

$\Downarrow$ product van factoren is nul als één van de factoren nul is

$x = 0$ of $x - 3 = 0$ of $-5x + 4 = 0$ of $x + 1 = 0$

$x = 0$ of $x = 3$ of $x = \frac{4}{5}$ of $x = -1$

Voor vergelijkingen van een hogere graad dan twee bestaat er geen eenvoudig algemeen algoritme of stappenplan dat sowieso tot een oplossing leidt. Daarom moeten we veeltermen ontbinden in factoren van de eerste of tweede graad. Van deze factoren kunnen we dan de nulwaarden bepalen. We moeten dus veeltermen delen.

9. Los de volgende vergelijkingen op:

   (a) $(x-3)\left(2x^2-8\right)(5x+10) = 0$

   (b) $\left(x^2-9\ \right)\left(-4x^2-1\right)(3x-2) = 0$

   (c) $\left(x^2-9\ x+14\right)(2x-5) = 0$

   (d) $2\,(2x-1) = x\,(2x-1)$

   (e) $(2x-12) + 5\,(x-6) = 0$

## 2.2 De staartdeling

10. Voor een Chirokamp wil de leiding de 82 leden in groepjes van 6 verdelen.
    (a) Hoeveel groepjes kan de leiding maken?

    (b) Hoeveel leden blijven er over?

    (c) Vul aan: $82 = 6 \cdot \ldots + \ldots$

In het basisonderwijs voeren de leerlingen een deling van getallen m.b.v. een **staartdeling** uit. De jongste leerlingen schrijven het resultaat niet met een komma maar met een rest. In dat geval spreken we van een **euclidische deling**[4].

Een vat wijn heeft een inhoud van 240 liter. Nadat de wijnboer enkele flessen en glaasjes heeft afgetapt is er nog 208 liter over. Hoeveel flessen van 75 cl kan hij nog vullen? Hoeveel cl blijft er nog over?

208 l = 20800 cl. We delen dus 20800 door 75:

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
 & 2 & 0 & 8 & 0 & 0 & 75 \\ \hline
- & 1 & 5 & 0 & \vdots & \vdots & 277 \\ \cline{2-4}
 & & 5 & 8 & 0 & \vdots & \\
- & & 5 & 2 & 5 & \vdots & \\ \cline{3-5}
 & & & 5 & 5 & 0 & \\
- & & & 5 & 2 & 5 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 2 & 5 &
\end{array}
$$

De wijnboer kan nog 277 flessen vullen. Hij heeft dan nog 25 cl over.

$$20800 = 75 \cdot 277 + 25$$

277 is het **quotiënt q** van de deling van 20800 door 75.
20800 noemen we het **deeltal D** en 75 de **deler d**. De **rest r** is 25.

Om een deeltal $D$ te delen door een deler $d$, bepalen we het quotiënt $q$ en de rest $r$ $(q, r \in \mathbb{N})$ zodat $D = d \cdot q + r$ met $r < q$.

$20800 = 75 \cdot 277 + 25$ en $25 < 75$

11. Op een bioboerderij kweken broer en zus Vandevelde quinoa. Ze verkopen dit in zakjes van 400 gram. Ze oogsten 7 kg quinoa Hoeveel zakjes kunnen ze vullen? Houden ze nog quinoa over om zelf te consumeren?

12. Het probleem van de kamelen.

    Er was een oude Arabier die 17 kamelen bezat. Toen de man zijn einde voelde naderen, wist hij dat de tijd gekomen was om zijn bezit te verdelen onder zijn drie zonen. Volgens de traditie zou de oudste zoon de helft van zijn totale bezit erven, de tweede een derde en de jongste een negende. Dit leek echter een onmogelijke zaak. En een kameel slachten om het beest in stukken te verdelen wilde de man niet. Ten einde raad liet de oude man een wijze vrouw uit het dorp bij zich komen. De vrouw ging naar huis en kwam terug met haar antwoord: “Neem mijn kameel en je probleem is opgelost”, zei ze.

    (a) Leg uit hoe het probleem door deze extra kameel is opgelost. Is de vrouw haar (enige) kameel kwijt?

    (b) Hoe komt het dat er met deze traditionele verdeling vaak een erfenisprobleem zal zijn?

    (c) Zijn er analoge aantallen die bij een ongelijke verdeling onder drie kinderen tot een vergelijkbaar verhaal van de 18 kamelen komen?

## 2.3 De euclidische deling

Voor de deling van veeltermen gaan we analoog als bij een staartdeling te werk.

Voorbeeld:

Is $2x^2 + 3x - 1$ een deler van $10x^3 + 11x^2 - 11x + 2$?
We zoeken dus een veelterm $q(x)$ zodat $10x^3 + 11x^2 - 11x + 2 = (2x^2 + 3x - 1) \cdot q(x)$

Omdat de graad van het deeltal 3 is en de graad van de deler 2 is, moet de graad van het quotiënt 1 zijn. (Bij het vermenigvuldigen van gelijksoortige machten behouden we het grondtal en tellen we de exponenten op.)

$q(x)$ is dus van de vorm $ax + b$.
We noemen dit de methode van de **onbepaalde coëfficiënten**.

Er moet gelden:

$$10x^3 + 11x^2 - 11x + 2 = (2x^2 + 3x - 1) \cdot (ax + b)$$

$\Downarrow$ We werken de haakjes uit.

$$10x^3 + 11x^2 - 11x + 2 = 2ax^3 + 2bx^2 + 3ax^2 + 3bx - ax - b$$
$$10x^3 + 11x^2 - 11x + 2 = 2ax^3 + (2b + 3a)\,x^2 + (3b - a)\,x - b$$

$\Downarrow$ Veeltermen zijn gelijk als de overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn.

$10 = 2a$ en $11 = 2b + 3a$ en $-11 = 3b - a$ en $2 = -b$

Uit de eerste vergelijking volgt dat $a = 5$.
Uit de laatste vergelijking volgt dat $b = -2$.
We controleren of de tweede en derde vergelijking ook voldaan zijn:

$11 = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5$ en $-11 = 3 \cdot (-2) - 5$

Omdat deze gelijkheden gelden is het quotiënt $q(x) = 5x - 2$.

Kunnen we deze deling ook noteren volgens het schema van de staartdeling?
Als we de termen rangschikken volgens dalende machten van x dan geldt dat de hoogstegraadsterm van het deeltal gelijk is aan het product van de hoogstegraadsterm in de deler en in het quotiënt:

$$10x^3 + \ldots = (2x^2 + \ldots)(5x + \ldots)$$
$$10x^3 = 2x^2 \cdot 5x$$

We kunnen de hoogstegraadsterm van het quotiënt $5x$ vinden door de hoogstegraadsterm $10x^3$ van het deeltal te delen door de hoogstegraadsterm $2x^2$ van de deler.

$$\frac{10x^3}{2x^2} = 5x$$

Omdat $10x^3+11x^2-11x+2=\left(2x^2+3x-1\right)\cdot(5x-2)$

geldt:
$$10x^3+11x^2-11x+2=\left(2x^2+3x-1\right)\cdot 5x+\left(2x^2+3x-1\right)\cdot(-2)$$
$$\Updownarrow$$
$$10x^3+11x^2-11x+2-\left(2x^2+3x-1\right)\cdot 5x=\left(2x^2+3x-1\right)\cdot(-2)$$
$$\Updownarrow$$
$$-4x^2-6x+2=(2x^2+3x-1)\cdot(-2)$$

$-2$ is het quotiënt van de deling van $-4x^2-6x+2$ door $2x^2+3x-1$.
We kunnen opnieuw met de hoogstegraadsveeltermen werken:
uit $-4x^2=2x^2\cdot(-2)$ volgt: $\dfrac{-4\ x^2}{2x^2}=-2$

We kunnen dit ook schikken zoals bij de staartdeling:

$$\begin{array}{rrrrr|ll}
D(x)= & 10x^3 & +11x^2 & -11x & +2 & 2x^2+3x-1 & =d(x)\\
\hline
-5x\cdot d(x)= & -10x^3 & -15x^2 & 5x & \vdots & 5x-2 & =q(x)\\
\cline{2-4}
 & & -4x^2 & -6x & +2 & & \\
-(-2)\cdot d(x)= & & 4x^2 & +6x & -2 & & \\
\cline{3-5}
 & & & & rest=0 & &
\end{array}$$

Opmerking:
De graad van de rest is steeds kleiner dan de graad van het deeltal. Als dat niet zo zou zijn, dan is de staartdeling nog niet afgewerkt.

Voorbeeld:

$$\begin{array}{rrrrr|ll}
D(x)= & 2x^3 & +0x^2 & +x & +6 & x^2+2x+5 & =d(x)\\
\hline
-2x\cdot d(x)= & -2x^3 & -4x^2 & -10x & \vdots & 2x & =q(x)\\
\cline{2-4}
 & & -4x^2 & -9x & +6 & &
\end{array}$$

Als we nog een stap verder gaan, dan is de graad van de rest $r(x)$ wel kleiner dan die van de deler $d(x)$.

Het kan handig zijn om de ontbrekende machten van $x$ aan te vullen met een coëfficiënt 0:

$$\begin{array}{rrrrr|ll}
D(x)= & 8x^3 & -6x^2 & +0x & -17 & 2x^2-x+5 & =d(x)\\
\hline
-4x\cdot d(x)= & -8x^3 & +4x^2 & -20x & \vdots & 4x-1 & =q(x)\\
\cline{2-4}
 & & -2x^2 & -20x & -17 & & \\
-(-1)\cdot d(x)= & & 2x^2 & -x & +5 & & \\
\cline{3-5}
 & & & -21x & -12 & &
\end{array}$$

$q(x)$ is het quotiënt en $r(x)$ de rest van de **euclidische deling** van het deeltal $D(x)$ door de deler $d(x)$ als en slechts als

$$D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ met } r(x) = 0 \text{ of } graad(r(x)) < graad(d(x))$$

$D(x)$ is deelbaar door $d(x)$ als en slechts als de rest van de euclidische deling nul is.

$$d(x)|D(x) \Leftrightarrow D(x) = d(x) \cdot q(x)$$

We lezen: $d(x)$ deelt $D(x)$.

Als de rest gelijk is aan nul, dan spreken we van een **opgaande deling**.
Als we 24 delen door 8 dan is het quotiënt 3. De rest is 0.
$24 = 8 \cdot 3$, dus 3 is een deler van 24 (en ook 8).

$x-2$ is een deler van $x^2-4$ want $x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$
$x-2$ is geen deler van $x^2-5$ want $x^2-5=(x-2)\cdot(x+2)-1$

13. Bepaal het quotiënt en rest van de deling van het deeltal $D(x)$ door de deler $d(x)$:
    (a) $D(x) = 6x^4 + 2x^3 - x^2 + 12$ $\quad d(x) = 2x - 1$
    (b) $D(x) = 12x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 2x + 24$ $\quad d(x) = x^2 + 2x - 6$
14. Bij deling van $v(x)$ door $3x^2 - x - 2$ is het quotiënt $2x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{4}{3}$ en de rest $\frac{29}{3}x + \frac{1}{3}$. Bepaal $v(x)$.
15. Bepaal $a$ en $b$ en het quotiënt van de deling van $x^4 + ax^3 + x^2 + x + b$ door $x^2 + 1$ zodat de rest gelijk is aan $3x - 1$.
16. Bepaal $a$ en $b$ zodat $d(x)\,|D(x)$:
    (a) $D(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ $\quad d(x) = (x-1)(x+3)$
    (b) $D(x) = ax^4 - 3x^2 + bx + 2$ $\quad d(x) = (x+2)(x+1)$
    (c) $D(x) = 2x^5 + ax^3 + bx - 4$ $\quad d(x) = x^2 - 1$
    (d) $D(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + 4x + b$ $\quad d(x) = x^2 + 4x + 3$
17. (a) Als $2x^4 - x^3 - 28x^2 + 3x + 3$ gedeeld wordt door $d(x)$ dan is het quotiënt $2x + 7$ en de rest $x - 4$. Bepaal de deler $d(x)$.
    (b) Als $2x^4 - x^3 - 28x^2 + 3x + 3$ gedeeld wordt door $d(x)$ dan is het quotiënt $x^3 - 4x^2 + 1$ en de rest $x - 4$. Bepaal de deler $d(x)$.

# 3 Deling door x-a

## 3.1 De reststelling

18. Vul de volgende tabel aan.

| Veelterm | Deler | Rest | Getalwaarde |
|---|---|---|---|
| $v(x) = x^2 + 3x - 6$ | $d(x) = x - 3$ | | $v(3) = \ldots$ |
| $v(x) = -4x^3 + 3x^2 + 5$ | $d(x) = x - 1$ | | $v(1) = \ldots$ |
| $v(x) = -x^3 + x - 4$ | $d(x) = x + 2$ | | $v(-2) = \ldots$ |

**De reststelling: De rest van de deling van v(x) door x − a is v(a).**

*Bewijs.* De graad van de deler $x - a$ is van de eerste graad. Dus de rest moet graad nul hebben of gelijk zijn aan nul. De rest is dus een getal $r$.

We noemen het quotiënt $q(x)$. Er geldt:

$$v(x) = (x - a) \cdot q(x) + r$$

$\Downarrow$ we vervangen $x$ door $a$

$$v(a) = (a - a) \cdot q(a) + r$$
$$v(a) = 0 \cdot q(a) + r$$
$$v(a) = r$$

□

**Een veelterm v(x) is deelbaar door x − a als en slechts als v(a) = 0.**

*Bewijs.*

$$x - a \mid v(x)$$

$\Updownarrow$ begrip deelbaarheid

$$r = 0$$

$\Updownarrow$ reststelling

$$v(a) = 0$$

Besluit: $x - a \mid v(x) \Leftrightarrow v(a) = 0$ □

19. Bepaal de rest van de deling van de veelterm $v(x)$ door de deler $d(x)$:

   (a) $v(x) = x^3 + 5x^2 + 6$ $\qquad d(x) = x - 3$

   (b) $v(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1$ $\qquad d(x) = x + 1$

   (c) $v(x) = -2x^3 + x + 4$ $\qquad d(x) = x + 2$

   (d) $v(x) = -2x^3 + 3x^2 + 4$ $\qquad d(x) = x - 2$

20. Bepaal p zodat bij deling van

    (a) $7x^3 - 3x^2 + px - 5$ door $x + 1$ de rest $-20$ is.

    (b) $x^4 + px^2 + 36$ door $x - 2$ de rest nul is.

21. Bij deling van de veelterm $ax^3 - 2x^2 + bx - 4$ door $x - 2$ is de rest 2. Bij deling van diezelfde veelterm door $x - 3$ is de rest 14. Bepaal de rest van de deling van deze veelterm door $x - 1$.

## 3.2 Delers van de vorm x-a

**Als een veelterm v(x) met gehele coëfficiënten deelbaar is door x − a (a $\in \mathbb{Z}_0$), dan is a een deler van de constante term van v(x).**

*Bewijs.*

Stel v(x) $= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$

$v(x)$ deelbaar is door $x - a$

$\Downarrow$ reststelling

$$0 = v(a) = a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1a + a_0$$

$$\Leftrightarrow \quad a_0 = -a_na^n - a_{n-1}a^{n-1} - \ldots - a_1a$$

$$\Leftrightarrow \quad a_0 = a(-a_na^{n-1} - a_{n-1}a^{n-2} - \ldots - a_1)$$

Merk op dat $-a_na^{n-1} - a_{n-1}a^{n-2} - \ldots - a_1 \in \mathbb{Z}_0$ ($a \in \mathbb{Z}_0$).
Dus volgt uit de definite van deelbaarheid dat $a \mid a_0$. □

Om de delers van de vorm $x - a$ te vinden van $v(x) = x^3 - 7x + 6$ bekijken we de delers van 6:
$1,\ -1,\ 2,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 6, -6$
We kunnen starten met $v(1)$ te bepalen. Als de som van de coëfficiënten nul is, dan is $v(1) = 0$.
Dat is hier het geval: $v(1) = 1 - 7 + 6 = 0$
Dus x-1 is een deler van v(x). $v(6) \neq 0$ dus $x - 6$ is geen deler van $v(x)$.
$v(2) = 8 - 14 + 6 = 0$. Dus $x - 2$ is een deler van $v(x)$.

Omdat het product van de constante termen van de factoren $6$ moet zijn zoeken we $a$ zodat $-1 \cdot 2 \cdot a = 6$. Dus $a = -3$. $v(-3) = -27 + 21 + 6 = 0$. Dus $x + 3$ is ook een deler van $v(x)$.

22. Bepaal alle delers van de vorm $x - a$ van de volgende veeltermen:

    (a) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

    (b) $x^3 + x^2 - 5x + 3$

    (c) $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$

    (d) $4x^4 - 9x^3 - 4x^2 + 12x$

    (e) $x^3 - 3x^2 + 12x - 20$

**Als $\mathbf{v}(\mathbf{a}) = \mathbf{v}(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ met $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ dan is $(\mathbf{x} - \mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{b})|\mathbf{v}(\mathbf{x})$.**

*Bewijs.*

$$
\begin{aligned}
& v(a) = 0 \\
& \quad \Downarrow \text{ kenmerk deelbaarheid} \\
& x - a \mid v(x) \\
& \quad \Downarrow \text{ begrip deelbaarheid} \\
& v(x) = (x-a) \cdot q(x) \qquad (1) \\
& \quad \Downarrow v(b) = 0 \text{ (gegeven)} \\
& v(b) = (b-a) \cdot q(b) = 0 \\
& \quad \Downarrow a \neq b \\
& q(b) = 0 \\
& \quad \Downarrow \text{ kenmerk deelbaarheid} \\
& x - b \mid q(x) \\
& \quad \Downarrow \text{ begrip deelbaarheid} \\
& q(x) = (x-b) \cdot q'(x) \\
& \quad \Downarrow \text{ (1)} \\
& v(x) = (x-a) \cdot (x-b) \cdot q'(x) \\
& \quad \Downarrow \text{ begrip deelbaarheid} \\
& (x-a) \cdot (x-b) \mid v(x)
\end{aligned}
$$

□

Voorbeeld:

$$(x+3) \cdot (x-5) \mid v(x) = 2x^3 - 5x^2 - 28x + 15$$

want $v(-3) = 2 \cdot (-27) - 5 \cdot 9 - 28 \cdot (-3) + 15 = -54 - 45 + 84 + 15 = 0$
en $v(5) \ = 2 \cdot 125 - 5 \cdot 25 - 28.5 + 15 = 250 - 125 - 140 + 15 = 0$.

23. Toon aan dat $x^4 + x^2 - 6x - 8$ deelbaar is door $(x-2) \cdot (x+1)$ zonder de deling uit te voeren.

24. Bepaal een factor van $3x^3 - 6x^2 - 3x + 6$ waarvan de graad zo groot mogelijk is.

25. Bepaal $a$ en $b$ zodat $d(x)|D(x)$. Het is niet nodig om de euclidische deling uit te voeren.
    (a) $D(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b \qquad d(x) = (x-1)(x+3)$
    (b) $D(x) = ax^4 - 3x^2 + bx + 2 \qquad d(x) = (x+2)(x+1)$
    (c) $D(x) = 2x^5 + ax^3 + bx - 4 \qquad d(x) = x^2 - 1$
    (d) $D(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + 4x + b \qquad d(x) = x^2 + 4x + 3$

## 3.3 De regel van Horner

Via de euclidische deling kunnen we het quotiënt en de rest van een deling bepalen. Als er een deler van de vorm $x - a$ is, dan kunnen we deze via een kortere methode vinden. Het schema waarbij we werken met de coëfficiënten van het deeltal en $a$ noemen we de **regel van Horner**.

- Voorbeeld 1
  Bepaal het quotiënt de rest van de deling van $3x^3 - 11x^2 + 14x - 1$ door $x - 2$.

$$
\begin{array}{r rrrr|l}
D(x) = & 3x^3 & -11x^2 & +14x & -1 & x-2 \quad = d(x) \\
\hline
-3x^2\cdot d(x) = & -3x^3 & +6x^2 & & & 3x^2-5x+4 \quad = q(x) \\
\cline{2-3}
 & & -5x^2 & +14x & -1 & \\
5x\cdot d(x) = & & 5x^2 & -10x & & \\
\cline{3-4}
 & & & 4x & -1 & \\
-4\cdot d(x) = & & & -4x & +8 & \\
\cline{4-5}
 & & & rest = & 7 &
\end{array}
$$

De coëfficiënten in het quotiënt vinden we ook terug in het linkerdeel van de staartdeling. Veel van deze termen worden meermaals geschreven: $3x^3$ en $-3x^3 \ldots$
$14x$ en $-5$ worden op de volgende lijnen in de staartdeling herhaald … Doordat we de veeltermen in dalende machten van $x$ noteren geeft de positie van de coëfficiënt ons al voldoende informatie over welke macht daarbij hoort $\ldots$

De essentiële getallen zijn deze die gemarkeerd zijn. De andere zijn eigenlijk overtollig. We kunnen dit in een overzichtelijk schema plaatsen:

In de bovenste lijn schrijven we de coëfficiënten van het deeltal, in dalende volgorde. $2$ van de deler $x - 2$ noteren we naast de linkse verticale lijn. De getallen die bij $-11,\ 14$ en $-1$ worden opgeteld zijn het $2$-voud van de net gevonden coëfficiënten van het quotiënt:

$$-11 + 2 \cdot 3 = -5$$
$$14 + 2 \cdot -5 = 4$$
$$-1 + 2 \cdot 4 = 7$$

Dit alles noteren we in het volgende schema:

$$
\begin{array}{c|rrrrrrl}
 & 3 & -11 & & 14 & & -1 & \\
2 & & 6 & (= 2 \cdot 3) & -10 & (= 2 \cdot (-5)) & 8 & = (2 \cdot 4) \\
\hline
 & 3 & -5 & & 4 & & 7 &
\end{array}
$$

- Voorbeeld 2
  Bepaal het quotiënt en de rest van de deling van $x^3 - 49x - 120$ door $x + 3$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & -49 & -120 \\ -3 & & -3 & 9 & 120 \\ \hline & 1 & -3 & -40 & 0 \end{array}$$

  Het quotiënt is $x^2 - 3x - 40$. De rest is nul. Het is dus een opgaande deling. Merk op dat we bij een ontbrekende macht van $x$ deze coëfficiënt in de bovenste lijn $0$ plaatsen.

26. Bepaal de rest en het quotiënt van de delingen van $D(x)$ door $d(x)$:

    (a) $D(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ $\qquad d(x) = x - 3$

    (b) $D(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$ $\qquad d(x) = x - 2$

    (c) $D(x) = 4x^4 - 6x^3 - x^2 + 2x + 1$ $\qquad d(x) = x - 1$

    (d) $D(x) = x^4 - 2x^2 - 8$ $\qquad d(x) = x + 2$

27. Bepaal de waarde van $p$ zodat $x - 3$ een deler is van $x^4 - px^3 + 2px - 4$.

28. Bepaal $a$ en $b$ zodat $d(x) \mid D(x)$. Pas hierbij de regel van Horner toe.

    (a) $D(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ $\qquad d(x) = (x - 1)(x + 3)$

    (b) $D(x) = ax^4 - 3x^2 + bx + 2$ $\qquad d(x) = (x + 2)(x + 1)$

    (c) $D(x) = 2x^5 + ax^3 + bx - 4$ $\qquad d(x) = x^2 - 1$

    (d) $D(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + 4x + b$ $\qquad d(x) = x^2 + 4x + 3$

# 4 Merkwaardige producten

29. Bepaal het quotiënt en de rest van de volgende delingen:

    (a) $x^3 - 1$ door $x - 1$

    (b) $x^3 - 2^3$ door $x - 2$

    (c) $x^3 + 3^3$ door $x + 3$

    (d) $x^5 + 32$ door $x + 2$

    (e) $x^4 - 1$ door $x - 1$

- $x^3 - a^3$ is deelbaar door $x - a$ want $a^3 - a^3 = 0$
  We bepalen het quotiënt met de regel van Horner.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ a & & a & a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & a & a^2 & 0 \end{array}$$

  Dus $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$. We kunnen dit veralgemenen tot de formule:

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

  Op een analoge wijze vinden we dat $x^n - a^n$ deelbaar is door $x - a$ en dat

$$x^n - a^n = (x-a) \cdot (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1})$$

  We kunnen dit veralgemenen tot de formule:

$$A^n - B^n = (A - B) \cdot (A^{n-1} + BA^{n-2} + B^2A^{n-3} + \ldots + B^{n-1})$$

- $x^3 + a^3$ is deelbaar door $x + a$ want $(-a)^3 + a^3 = 0$
  We bepalen het quotiënt met de regel van Horner.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 0 & -a^3 \\ -a & & -a & a^2 & a^3 \\ \hline & 1 & -a & a^2 & 0 \end{array}$$

  We kunnen dit veralgemenen tot de formule:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

  $x^4 + a^4$ is niet deelbaar door $x + a$ want $(-a)^4 + a^4 = 2a^4$
  $x^n + a^n$ is enkel deelbaar door $x + a$ als $n$ oneven is

  Op een analoge wijze vinden we dat $x^n + a^n$ (met $n$ oneven) te ontbinden is:

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-1})$$

We kunnen dit veralgemenen tot de formule:

$$A^n + B^n = (A+B)(A^{n-1} - BA^{n-2} + B^2A^{n-3} - \ldots + B^{n-1}) \text{ met } n \text{ oneven.}$$

- Naast een formule voor $a^3 - b^3$ en $a^3 + b^3$, bestaat er ook een formule voor $(a \pm b)^3$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)\cdot(a+b)^2 \\ &= (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

Analoog:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a+(-b))^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$

30. Werk uit door een formule toe te passen, indien mogelijk.
    (a) $(7x+6)^2$
    (b) $(-1+2x)(2x+1)$
    (c) $(5x-3)^3$
    (d) $(-a-b)(a^2-ab+b^2)$

31. Ontbind de volgende veeltermen, indien mogelijk.
    (a) $4x^2+6x+9$
    (b) $x^3+125$
    (c) $x^4-16$
    (d) $1-32x^5$
    (e) $(3x-1)^3+a^3$
    (f) $81x^5-100x^3$
    (g) $64x^4+x$
    (h) $-18x^2+8x^3-27+54x$
    (i) $125a^3+150a^2b+20ab^2+8b^3$

32. Ontbind $a^6 - b^6$ op twee verschillende manieren.

33. Hoeveel van de volgende veeltermen kunnen ontbonden worden als een product van veeltermen met een lagere graad met reële coëfficiënten?

$$x^2+1, \quad x^3+1, \quad x^4+1, \quad x^5+1, \quad x^6+1$$

$a)$ 0 $\quad$ $b)$ 1 $\quad$ $c)$ 2 $\quad$ $d)$ 3 $\quad$ $e)$ 4

*VWO 1987, eerste ronde*

# 5 Ontbinden in factoren en oplossen van vergelijkingen

## 5.1 Samennemen van termen

- Naast het toepassen van merkwaardige producten kunnen we ook door het samennemen van termen veeltermen ontbinden. We kijken hierbij naar de coëfficiënten van elke term Er is nl. een patroon te herkennen als twee tweetermen met elkaar vermenigvuldigd zijn:

  $$(ax+b)\cdot(cx^2+d) = acx^3+bcx^2+adx+bd$$

  De eerste twee termen bevatten de factor $cx^2$, de laatste twee termen de factor $d$. We kunnen dus van de eerste twee termen $cx^2$ voorop zetten en van de laatste twee de factor $d$. We kunnen ook de eerste en de derde term samennemen en de gemeenschappelijke factor $ax$ voorop zetten en de gemeenschappelijke factor $b$ bij de tweede en vierde term.

- Voorbeeld:
  In de coëfficiënten van $2x^4+x^3+10x+5$ is er een patroon te herkennen: De laatste twee coëfficiënten zijn een vijfvoud van de eerste twee. Dat kan een aanzet zijn om de termen te groeperen: de eerste twee en de laatste twee.

  $$2x^4+x^3+10x+5$$

  Van elk duo plaatsen we de gemeenschappelijke factor voorop:

  $$x^3\,(2x+1)+5\,(2x+1)$$

  We bekomen nu een tweeterm met een gemeenschappelijke factor: 2x+1.
  Deze factor kunnen we opnieuw voorop plaatsen door de omgekeerde distributieve eigenschap te gebruiken:

  $$(2x+1)\,(x^3+5)$$

  Daardoor is de gegeven veelterm ontbonden in factoren:

  $$2x^4+x^3+10\ x+5 = \ (2x+1)\,(x^3+5)$$

  Opmerking: We ook kunnen ook de eerste en de derde en dan de tweede en vierde term samen nemen.

  $$2x^4+x^3+10x+5 = 2x(x^3+5)+x^3+5 = (x^3+5)(2x+1)$$

34. Ontbind de volgende veeltermen door het samennemen van termen.

    (a) $10x^3-15x^2+14x-21$

    (b) $3x^3-x^2-15x+5$

    (c) $4x^4-7x^3-24x^2+42$

    (d) $6x^5+15x^4+2x+5$

## 5.2 Ontbinden in factoren

Om een veelterm $v(x)$ van een hogere graad te ontbinden gaan we als volgt te werk:
Dat kan op de volgende wijze:

1) Door een **gemeenschappelijke factor** $x$ of $x^n$ af te zonderen.

2) Via een **merkwaardig product**.

3) Via het verstandig toepassen van de **omgekeerde distributieve eigenschap** (samennemen van termen).

4) **Via delers van de vorm** $x - a$ die we kunnen vinden door na te gaan of $v(a) = 0$.

5) Vanaf de **tweede graad** ontbinden we via $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

Voorbeeld: Ontbind $6x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x - 2$.
We zoeken delers van de vorm $x - a$ met $a$ een deler van $2$.
We vinden $v(1) = 0$ en $v(-2) = 0$. Dus $x - 1|v(x)$ en $x + 2|v(x)$.
We kiezen bijv. eerst de deler $x - 1$. Via de regel van Horner bepalen we het quotiënt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 1 | −16 | 11 | −2 |
| 1 | | 6 | 7 | −9 | 2 |
| | 6 | 7 | −9 | 2 | 0 |

Dus $6x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x - 2 = (x - 1) \cdot (6x^3 + 7x^2 - 9x + 2)$.
Omdat $x + 2 \mid v(x)$ moet $x + 2$ deler zijn van $6x^3 + 7x^2 - 9x - 2$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | 7 | −9 | 2 |
| −2 | | −12 | 10 | −2 |
| | 6 | −5 | 1 | 0 |

Hieruit volgt:

$$6x^3 + 7x^2 - 9x - 2 = (x + 2) \cdot (6x^2 - 5 + 1)$$

$$\Downarrow D = 25 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ en } x_2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = (2x - 1) \cdot (3x - 1)$$

$$6x^3 + 7x^2 - 9x - 2 = (x + 2) \cdot (2x - 1) \cdot (3x - 1)$$

Besluit: $6x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (2x - 1) \cdot (3x - 1)$

We kunnen de twee schema's van Horner ook in elkaar passen.

$$
\begin{array}{r|rrrr|r|}
 & 6 & 1 & -16 & 11 & -2 \\
1 & & 6 & 7 & -9 & 2 \\
\hline
 & 6 & 7 & -9 & 2 & 0 \\
-2 & & -12 & 10 & -2 & \\
\hline
 & 6 & -5 & 1 & \multicolumn{1}{|r|}{0} &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
6\,x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x - 2 &= (x-1)\,.\,(x+2)\,.\,\big(6x^2 - 5x + 1\big) \\
&= (x-1)\,.\,(x+2)\,.\,(2x-1)\,.\,(3x-1)
\end{aligned}
$$

35. Ontbind de volgende veeltermen

(a) $6x^3 + 13x^2 + 2x - 5$

(b) $6x^4 - x^3 - 18x^2 + x + 12$

(c) $x^4 - 2x^2 - 8$

(d) $x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$

(e) $125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$

## 5.3 Oplossen van veeltermvergelijkingen

We lossen veeltermvergelijkingen op door de veelterm te ontbinden in factoren van de eerste en tweede graad.

Voorbeeld: Los op $14^3 + 11x^2 - 5x - 2 = 0$.
Delers van 2: 1,-1,2,-2.

$$v(-1) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 14 & 11 & -5 & -2 \\ -1 & & -14 & 3 & 2 \\ \hline & 14 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$14x^3 + 11x^2 - 5x - 2 = (x+1)\cdot\big(14x^2 - 3x - 2\big)$$

$$\Downarrow D = 9 - 4\cdot 14\cdot(-2) = 121$$

$x = -\dfrac{2}{7}$ of $x = \dfrac{1}{2}$

Oplossing $= \{-1, -\dfrac{2}{7}, \dfrac{1}{2}\}$

36. Los volgende vergelijkingen op.

(a) $x^3 - 27x + 54 = 0$

(b) $12x^3 - 43x^2 - 22x + 8 = 0$

(c) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

(d) $4x^4 - 28x^3 + 45x^2 + 28x - 49 = 0$

(e) $x^7 - x^6 - 14x^4 + 14x^3 + 28x - 28 = 0$

# 6 Rekenen met rationale lettervormen

## 6.1 Vereenvoudigen van rationale lettervormen

Net zoals we een breuk van natuurlijke getallen vereenvoudigen door de teller en de noemer door dezelfde factor te delen, kunnen we dit analoog doen bij rationale vormen. Bijvoorbeeld:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + x}{x^3 + 4x^2} \text{ en } \frac{x^3 - 2\ x^2 + 1}{x^2 + 4x}$$

zijn **gelijkwaardige rationale vormen**. Merk op dat zowel de eerste als de tweede vorm niet gedefinieerd is voor $x = 0$. We kunnen immers niet delen door $0$: zowel de eerste als de tweede vorm heeft nog $x = 0$ als deler.

Rationale vormen zijn dus maar gelijk als ze voor dezelfde getallen gedefinieerd zijn. Als we een deler wegdelen in de teller en de noemer dan is de **vereenvoudigde vorm pas gelijk aan de opgave als we geen extra oplossing creëren**.

Voorbeelden:

$$\frac{2x^3 + x^2 - 7x - 6}{2x^3 - x^2 - 6x} = \frac{t(x)}{n\,(x)} \text{ met } t(x) \text{ de teller en } n(x) \text{ de noemer van deze rationale vorm}$$

$\Downarrow$ Teller: regel van Horner met $t(-1) = 0$ en toepassen van de discriminant

Noemer: factor $x$ voorop en toepassen van de discriminant

$$= \frac{(x-2)\cdot(x+1)\cdot(2x+3)}{x(x-2)(2x+3)}$$

$$= \frac{x+1}{x} \text{ als } x \neq 2 \text{ en } x \neq -\frac{3}{2}$$

$$\frac{2x^3 - 14x - 12}{x^3 + 2x^2 + 9x + 18} = \frac{2(x^3 - 7x - 6)}{x^2\,(x+2) + 9(x+2)}$$

$\Downarrow$ $t(-1) = 0$. Via Horner weten we dat $x^2 - x - 6$ het quotiënt is.

De som van de wortels van de drieterm is 1 en het product -6.

De wortels zijn -2 en 3.

De noemer ontbinden we door het samennemen van termen.

$$= \frac{2\ \ (x+1)\,(x+2)(x-3)}{(x+2)\,(x^2+9)}$$

$$= \frac{2\ \ (x+1)\,(x-3)}{x^2+9} \text{ als } x \neq -2$$

37. Vereenvoudig volgende rationale vormen:

(a) $\dfrac{2x^3+9x^2+4x-15}{2x^2+3x-5}$

(b) $\dfrac{2x^3+8x^2-x-4}{x^4+3x^2-x+3}$

(c) $\dfrac{2x^4-10x^3+17x^2-25x+30}{2x^3+4x^2+5x+10}$

(d) $\dfrac{x^5+6x^3-3x^2+8x-12}{x^5-x^4+7x^3-7x^2+12x-1}$

## 6.2 Optellen en vermenigvuldigen van rationale lettervormen

38. Schrijf als één rationale (letter)vorm:

(a) $\dfrac{3}{12}+\dfrac{4}{15}$

(b) $\dfrac{2}{ab}+\dfrac{3}{a^2}$

(c) $\dfrac{x+4}{x(x-1)}-\dfrac{3x}{(x-1)\cdot(x+2)}$

(d) $\dfrac{x}{2x^2+7x-4}-\dfrac{x-1}{3x^2+14x+8}$

Als we rationale lettervormen willen optellen (of aftrekken) dan gaan we analoog te werk als bij het optellen van (getallen)breuken:

1) We nemen het kleinste gemeen veelvoud van de noemers.

2) We vermenigvuldigen in elke breuk de teller en de noemer met dezelfde factor zodat de nieuwe noemer het kleinste gemeen veelvoud van de gegeven noemers is.

3) We plaatsen de optelling (of aftrekking) op één noemer en tellen (trekken) de tellers op (af).

4) We vereenvoudigen de nieuw bekomen teller.

5) De noemer mag in de ontbonden vorm, dus als een product van factoren blijven staan.

39. Schrijf als één rationale (letter)vorm en vereenvoudig.

(a) $\frac{10}{21} \cdot \frac{6}{25}$

(b) $\frac{st}{pq} \cdot \frac{rq}{t^2}$

(c) $\frac{x+2}{x\,(x+1)} \cdot \frac{x}{x+2}$

(d) $\frac{x-1}{2x^2+7x-4} \cdot \frac{2x-1}{3x^2-x-2}$

Als we rationale lettervormen willen vermenigvuldigen dan gaan we analoog te werk als bij het vermenigvuldigen van rationale getallenbreuken:

1) We ontbinden de tellers en noemers in factoren.

2) We schrijven het product als één breuk waarbij we de teller(s) met de teller(s) vermenigvuldigen en de noemer(s) met de noemer(s).

3) We delen de nieuw bekomen teller en noemer door dezelfde factor.

4) We werken de teller en de noemer uit.

5) Als we in de noemer een factor weggedeeld hebben, dan sluiten we de nulwaarde van deze factor uit.

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+2x}{2x^2+x-15} \cdot \frac{x+3}{x^2+x} &= \frac{x(3x+2)}{(2x-5)\,.(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x(x+1)} \\ &= \frac{3x+2}{(2x-5).(x+1)} \text{ als } x \neq 0 \text{ en } x \neq -3 \end{aligned}$$

40. Schrijf als één rationale (letter)vorm en vereenvoudig.

(a) $\dfrac{\dfrac{\frac{3}{4}}{12}}{7} =$

(b) $\dfrac{\dfrac{klm}{pq}}{mq} =$

(c) $\dfrac{klm}{\dfrac{pq}{mq}} =$

(d) $\dfrac{\frac{x-1}{x-3}}{\dfrac{x^2-1}{x^2+x-12}} =$

Als we rationale lettervormen willen delen dan gaan we analoog te werk als bij het delen van rationale getallenbreuken:

- Delen door een breuk is equivalent met het vermenigvuldigen van de omgekeerde breuk.
- We werken verder met het vermenigvuldigen van breuken.

41. Werk uit en vereenvoudig indien mogelijk.

(a) $\dfrac{2x^2-9x+4}{x^2+3x+5} \cdot \dfrac{x^3-x^2-7x-20}{2x^3+7x^2+2x-3} =$

(b) $\dfrac{3}{6x^3-28x^2-10x} - \dfrac{2x}{3x^3-17x^2+8x+5} =$

(c) $\dfrac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{\frac{1}{b}} - a} =$

(d) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+c}{\dfrac{\frac{d}{b}}{e} - \dfrac{f}{b}} =$

(e) $\dfrac{\dfrac{x^3-4x^2+x+6}{2x^3+x^2+3x+3}}{\dfrac{x^3+x^2+3x+3}{4x^3-6x^2+10x-15}} =$

(f) $\dfrac{8x^4+16x^3-27x-54}{x^2-5x+6} \cdot \dfrac{2x^2-5x-3}{x^3+8} =$

# 7 Oefeningen

## 7.1 Definitie en kenmerken van een veelterm

**Reeks A**

42. Bepaal $a,\ b,\ c$ en $d$ zodat de veeltermen gelijk zijn:

    (a) $(a+1)\ x^3 + 5x^2 + 4cx - 12 = 2x^3 + (6-b)x^2 - 8x-(d+5)$

    (b) $(2+a)\,x^3 + bx^2 + x + 5 = 3x^3 + 2x^2 + (4-c) + d + a$

43. Bepaal van de veelterm $v(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$

    (a) $v(0)$ (b) $v(1)$ (c) $v(-1)$

44. Zijn samengestelde functies van veeltermfuncties ook veeltermfuncties?
    Is er een regel vast te stellen voor de graad van deze samengestelde functie?

45. Gegeven zijn de volgende veeltermen:
    $f(x) = x^2 + x - 2$
    $g(x) = 3x$
    $h(x) = x + 1$
    Bereken:

    (a) $f \circ g + h$

    (b) $g \circ (f - h)$

    (c) $g \circ f \circ h$

46. Gegeven zijn de volgende veeltermen:
    $f(x) = 5x^2 + 2x$
    $g(x) = (3x-1)^2$
    $h(x) = x^3 - 2x + 5$
    Bereken:

    (a) $f \circ g + h$

    (b) $g \circ (f - h)$

    (c) $g \circ (f + h)$

**Reeks B**

47. Gegeven: $p(x) = x^5 - 2x^4$, $q(x) = x^3 - 3x$ en $r(x) = x - 2$
Welke van de volgende veeltermen heeft de hoogste graad?

(a) $p\Big(q(x) + r(x)\Big)$

(b) $q\Big(p(x) \cdot r(x)\Big)$

(c) $r\Big(p(x) \cdot q(x)\Big)$

(d) $p(x) \cdot q(x) \cdot r(x)$

*Starttoets biomedische wetenschappen 2023*

## 7.2 De euclidische deling

**Reeks A**

48. Bepaal het quotiënt en de rest van de volgende delingen van $D(x)$ door $d(x)$:

(a) $D(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ $\quad d(x) = x - \frac{1}{2}$

(b) $D(x) = 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ $\quad d(x) = 2x^2 + 3$

(c) $D(x) = 6x^3 + 4x^2 + 3x$ $\quad d(x) = 3x^2 + x + 1$

(d) $D(x) = 6x^4 + 3x + 2$ $\quad d(x) = 2x^2 + 5$

49. Bepaal het quotiënt en de rest bij de deling van $f(x) = 3x^2 + 3x^4 + 24 - 2x^3$ door $x^2 - 2$.

50. Bij deling van veeltermen is het quotiënt $x^3 - x^2 + 2x$ en de rest $5x-1$. Bepaal het deeltal als $3x^3 + 2x^2 + 1$ de deler is.

**Reeks B**

51. Bepaal $a$ en $b$ zodat $ax^3 - 16x^2 + bx - 1$ deelbaar is door $(2x-1)^2$ .

52. Bepaal $a$ en $b$ zodat $a\,x^3 + bx^2 + 5x-2$ deelbaar is door $(5x-1) \cdot (3x+2)$.

53. Stel een vergelijking $v\left(x\right)=0$ op die aan de volgende voorwaarden voldoet:

    (a) $v(x)$ is van de tweede graad en heeft 2 en 3 als oplossing.

    (b) $v(x)$ is van de derde graad en heeft 5 als dubbele oplossing en 7 als enkelvoudige oplossing.

    (c) $v(x)$ is van de derde graad en heeft 5 als dubbele oplossing en 7 als enkelvoudige oplossing en $v(1) \; = \; 3$.

    (d) $v(x)$ is van de vierde graad en heeft twee negatieve getallen als oplossing en nul als tweevoudige oplossing.

54. Stel een voorschrift van een functie $f(x)$ op die aan de volgende voorwaarden voldoet:

    (a) $f(x)$ is van de derde graad en heeft 4 en 5 als nulwaarden.

    (b) $f(x)$ is van de derde graad, heeft drie negatieve getallen als nulwaarden en $f(1)=3$.

    (c) $f(x)$ is van de vierde graad en heeft twee paar dubbele nulwaarden.

55. De veeltermfuncties $f(x)=x^2$, $g(x)=x^4$ en $f(x)=x^6$

    (a) Bepaal $f(-x)$ en vergelijk met $f(x)$.

    (b) Bepaal $g(-x)$ en vergelijk met $g(x)$.

    (c) Bepaal $h(-x)$ en vergelijk met $h(x)$.

    Een functie $f$ is een **even functie** $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f\left(-x\right) = f(x)$.
    De naam even functie komt van de even exponenten in $f(x)=x^2$ , $g(x)=x^4, \ldots$.

    (d) Geef het voorschrift van een functie (verschillend van $g(x)$) van de vierde graad die even is.

    (e) Bepaal de nulwaarden van deze functie.

56. Bekijk de vorige oefening.

    (a) Hoe zou je een oneven functie kunnen definiëren?

    (b) Geef een voorbeeld van een oneven functie.

    (c) Bepaal de nulwaarden van deze functie.

**Reeks C**

57. Er bestaat bij de deling van de veelterem $v(x)$ door $w(x)$ bestaat er precies één quotiënt $q(x)$ en precies één rest $r(x)$. Toon aan.

## 7.3 Deelbaarheid door $x - a$

**Reeks A**

58. Bepaal het quotiënt en de rest van de delingen:

    (a) $2x^3 - 2x^2 - 11x - 3$ delen door $x - 3$

    (b) $3x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 5$ delen door $x + 1$

    (c) $x^4 + 5x^3 + x^2 - 3x - 4$ delen door $x + 5$

    (d) $2x^3 - 9x^2 + 7x - 12$ delen door $x - 4$

59. (a) Bepaal het quotiënt en de rest van de deling van $2x^3 - 2x^2 - 7x - 5$ door $x - 3$

    (b) Bepaal uit het antwoord van a) het quotiënt en de rest van de deling van $2x^3 - 2x^2 - 7x - 5$ door $3 - x$.

60. Bepaal van de volgende veeltermen alle delers van de vorm $x - a$ met $a \in \mathbb{Z}$:

    (a) $2x^3 + x^2 - 25x + 12$

    (b) $x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 11x + 30$

    (c) $-3x^4 + 7x^3 + 25x^2 - 63x + 18$

    (d) $3x^4 + 9x^2 - 12$

**Reeks B**

61. Bij deling van de veelterm $ax^3 + bx^2 - x + 2$ door $x - 3$ en door $x + 4$ is de rest -1, respectievelijk -10. Bepaal $a$ en $b$.

62. Bepaal a en b zodat $v(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 + 6x + 9$ deelbaar is door $(x + 3)^2$. Gebruik hierbij de regel van Horner.

**Reeks C**

63. De resten van de delingen van een veelterm $v(x)$ door $x + 2$ en $x - 1$ zijn 8, respectievelijk -4. Bepaal de rest van de deling van $v(x)$ door $(x + 2) \cdot (x - 1)$.

64. Waarom kan je bij de vorige vraag niet de regel van Horner gebruiken?

65. Bepaal $a$ en $b$ in functie van $k$ zodat $x^3 + ax + b$ deelbaar is door $(x - k)^2$.

## 7.4 Merkwaardige producten

**Reeks A**

66. Ontbind in factoren:

(a) $x^6 - 729$

(b) $64x^6 + 1$

(c) $125x^3 - 1000y^3$

(d) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

(e) $x^6 + 729$

**Reeks B**

67. Ontbind in factoren:

(a) $8\ x^3 + (x-1)^3$

(b) $x^4 - 5x^2 + 6$

(c) $216a^3 + 343b^3$

(d) $32x^5 - 1$

(e) $x^8 - 1024\sqrt{2}\ x$

## 7.5 Ontbinden in factoren en oplossen van veeltermvergelijkingen

**Reeks A**

68. Ontbind de volgende veeltermen door het samennemen van termen.

(a) $2\ x^3 + x^2 - 14x - 7$

(b) $10\ x^3 - 15\ x^2 + 2x - 3$

(c) $12x^3 + 28x^2 - 15x - 35$

(d) $x^7 + x^5 + 3\ x^4 + 2x^3 + 2\ x^2 + 6$

(e) $3x^5 - 12x^3 + 7\ x^2 - 28$

69. Ontbind de volgende veeltermen:
    (a) $49x^2 - 42x + 9$
    (b) $2x^3 - 6x$
    (c) $54a^5 + 36a^3 + 6a$
    (d) $10x^2 - x - 21$
    (e) $x^3 - 12x^2 - 48x + 64$

70. Los op:
    (a) $(3x + 4)^2 - 8(3x + 4) + 16 = 0$
    (b) $-x^6 - 4x^4 - 4x^2 = 0$
    (c) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$
    (d) $(5x + 7)^4 - 16x^4 = 0$
    (e) $x^4 - x^2 + 1 = 0$
    (f) $x^2 - 11x + 30 = 0$
    (g) $z^2 + 6\sqrt{2}z = -18$

**Reeks B**

71. Ontbind de volgende veeltermen:
    (a) $4x^6 - 12x^3 + 9$
    (b) $8x^5 - 36x^4 + 54x^3 - 27x^2$
    (c) $x^6 + 2x^4 + 6x^2 + 12$
    (d) $-x^6 + x^4 + 6x^2 + 9$
    (e) $49x^5 - 100x$

72. Los de vergelijkingen op als het volgende gegeven is:
    (a) $ax^3 + bx^2 + 3x - 1 = 0$
    Als we $v(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 1$ delen door $x + 1$ en door $x - 3$ dan is de rest steeds -1.
    (b) $2x^4 - 9x^3 - 13\ x^2 + a\ x + b = 0$
    Als we $w(x) = 2x^4 - 9x^3 - 13x^2 + ax + b$ delen door $x - 1$ en door $x - 2$ dan is de rest 90, respectievelijk 72.

73. Naast het oplossen van veeltermvergelijkingen is het ook mogelijk om **veeltermongelijkheden** op te lossen. We werken dan analoog als bij een tweedegraadsongelijkheid met een **tekentabel**.

Een product van factoren is nul als één van de factoren nul is.
Een product van factoren is positief als het aantal factoren met een negatief teken even is.
Een product van factoren is negatief als het aantal factoren met een negatief teken oneven is.

Los op: $14x^3 + 11x^2 - 5x - 2 > 0$
We definiëren eerste $v(x) = 14x^3 + 11x^2 - 5x - 2$.
Noteer eerst de delers van 2: 1,-1,2,-2.
Omdat $v(-1) = 0$ kiezen we voor a de waarde -1.

Pas nu de regel van Horner toe om $v(x)$ te ontbinden in factoren.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 14 & 11 & -5 & -2 \\ -1 & & -14 & 3 & 2 \\ \hline & 14 & -3 & -2 & 0 \end{array}$$

$v(x)$ kan geschreven worden als het volgende product en vervolgens passen we de discriminant toe om verder te ontbinden.

$$14x^3 + 11x^2 - 5x - 2 = (x+1) \cdot \left(14x^2 - 3x - 2\right)$$

$$\Downarrow D = 9 - 4 \cdot 14 \cdot (-2) = 121$$

$$x = -\frac{2}{7} \text{ of } x = \frac{1}{2}$$

Oplossing $= \{-1, -\frac{2}{7}, \frac{1}{2}\}$

We plaatsen de verschillende factoren van de veelterm onder elkaar in een tekentabel en noteren bovenaan de oplossingen van de vergelijking.

| $x$ | | $-1$ | | $\frac{-2}{7}$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $14x^2 - 3x - 2$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $v(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

In de opgave staat $> 0$. Dus we duiden alle gebieden van het product aan met een positief teken.

| $x$ | | $-1$ | | $\frac{-2}{7}$ | | $\frac{1}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $14x^2 - 3x - 2$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $v(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

Analoog zoals bij het oplossen van vierkantsongelijkheden projecteren we deze gebieden naar de eerste lijn.
De oplossingsverzameling is $\left]-1, -\frac{2}{7}\right[ \cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Los op:

(a) $6x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x - 2 > 0$

(b) $x^4 - 2x^3 + x^2 \leq 0$

(c) $3x^3 - 7x^2 + 6x - 5 \geq 0$

(d) $x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 28x + 60 \leq 0$

(e) $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 < 0$

**Reeks C**

74. Ontbind de volgende veeltermen of algebraïsche vormen:

(a) $-5a^3 + 4a^2b - 15ab + 12b^3$

(b) $6x^5 + 21x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 2x - 7$

(c) $ab + a^2cosx - b^2sinx - ab\ sinx\ cosx$

(d) $x^4 + x^3 - 5\ x^2 - 6x - 6$

## 7.6 Bewerkingen met rationale lettervormen

**Reeks A**

75. Werk uit en/of vereenvoudig

(a) $\dfrac{x^3+1}{x^3-6x^2+3x+10} \cdot \dfrac{2x^3-4x^2+5x-10}{x+1} =$

(b) $\dfrac{2x^2+3}{x^3-7x-6} - \dfrac{3x-5}{x^3+4x^2+x-6} =$

(c) $\dfrac{\dfrac{2x^2-5\ x+3}{x^2-4}}{\dfrac{5x^2-7\ x+2}{x^2-2x}} =$

(d) $\dfrac{\dfrac{5\ x-3}{x^2-1}}{5\ x^2+2x-3} =$

(e) $\dfrac{5\ x-3}{\dfrac{x^2-1}{5x^2+2x-3}} =$

**Reeks B**

76. Werk uit en/of vereenvoudig

(a) $\dfrac{-1}{x^2+2x}+\dfrac{2}{x^2-4}=$

(b) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-ab}\cdot\dfrac{3a^2}{2a+2b}=$

(c) $\dfrac{p+5}{1-\dfrac{p}{p-1}}=$

(d) $\dfrac{(a-b)^3}{a^2-b^2}=$

(e) $\dfrac{(2x+3y)^2-(3x-y)^2}{(x+3y)^2-(2x-y)^2}=$

(f) $\left(2-\dfrac{1}{x-2}\right).\left(x-5+\dfrac{1}{x-5}\right)=$

(g) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^{-1}=$

(h) $\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{b-a}\right)^{-1}=$

(i) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4x+4}\cdot\dfrac{x^3+8}{x^3-8}=$

(j) $\dfrac{\dfrac{1}{x-y}}{xy}\cdot\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)=$

## 7.7 Herhalingsoefeningen

77. Bij deling van $2x^4 + ax^3 - 9x^2 + bx - 4$ door $-2x^2 + 4x - 3$ is de rest gelijk aan $15x - 2$. Bepaal $a$ en $b$.

78. Toon aan dat een veelterm waarvan de som van de coëfficiënten gelijk is aan nul deelbaar is door $x - 1$.

79. Als $x^2 - x - 1$ een deler is van $ax^3 + bx^2 + 1$ , dan is $b$ gelijk aan

    (a) $-2$ (b) $-1$ (c) $0$ (d) $1$ (e) $2$

*VWO 2000*

80. Bepaal van de volgende veeltermen alle delers van de vorm $x - a$ met $a \in \mathbb{Z}$.

    (a) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

    (b) $2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12$

    (c) $x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15$

81. Bepaal $a$ en $b$ zodat $x^4 - 3x^3 + ax^2 + bx - 8$ deelbaar is door $(x - 2)^2$.

82. Welke veelterm is geen deler van $(x-1)^2\left(x^3+x\right)$ ?

    (a) $x^3 - x^2 + x - 1$

    (b) $x^2 - 2x + 1$

    (c) $x^2 - x$

    (d) $x^3 - x$

    (e) $x^4 - 2x^2(x-1) - 2x + 1$

*VWO 1994*

83. We ontbinden de veelterm $x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ in twee factoren. Als de ene factor $x^2 + x + 1$ is, dan is de tweede factor

    (a) $x^6 + 1$

    (b) $x^6 + x^3 + 1$

    (c) $x^6 + x^4 + x^2 + 1$

    (d) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

    (e) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

*JWO 2008, tweede ronde*

84. Berken en/of vereenvoudig:

(a) $\dfrac{3x^5 - 10x^3 + 19x^2 - 30x + 10}{x^3 + 2x^2 + 5}$

(b) $\dfrac{(-1)^3 - (a+1)(a-1)^2}{(a-1)^6}$

(c) $\dfrac{1+x}{1+2x+x^2} - \dfrac{1+x}{1+x^3}$

85. Ontbind in factoren:

(a) $8x^5 + 16x^4 - 10x^2 - 64x^3 - 20x + 80$

(b) $x^3 - 2\sqrt{2}$

(c) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x$

(d) $49x^5 - 100x$

(e) $x^6 - 36$

86. Los op:

(a) $54x^4 - 54x^3 + 18x^2 - 2x = 0$

(b) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

(c) $2x^4 + 13x^3 + 7x^2 - 12x = 0$

(d) $x^5 + 16x^3 - 225x = 0$

(e) $x^6 = 25$

87. Als $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ en $n \in \mathbb{N}$ dan geldt: $a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n =$

(a) $\dfrac{a - a^{n+1}}{1-a}$ (b) $\dfrac{1 - a^n}{1-a}$ (c) $\dfrac{1 - a^{n+1}}{1-a}$ (d) $\dfrac{a - a^n}{1-a}$ (e) $\dfrac{a^n - a}{1-a}$

*VWO 1988*

88. Als $q(x)$ het quotiënt en $r(x)$ de rest is van de deling van $D(x)$ door $d(x)$, wat is dan het quotiënt en de rest van de deling van $kD(x)$ door $kd(x)$, met $k \in \mathbb{R}_0$?

# Referenties

[1] Koen De Naeghel, *wiskunde in Zicht: veeltermen*.

[2] R. Verhulst, *Exponent 4/5*, Standaard educatieve uitgeverij, 1992.

[3] Hilde Eggermont, Alexander Holvoet, Els Vanlommel, *Uitwiskeling*, jaargang 40 (3), 2024.